

文章编号: 1000 8055(2008)01 0064 06

一种通量加权型紧致格式

袁湘江^{1,2}, 涂国华^{1,2}, 许 坦³, 陆利蓬⁴

- (1. 中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000;
2. 北京航空航天大学 国家计算流体力学实验室, 北京 100083;
3. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083;
4. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘 要: 将通量加权的思想引入到紧致格式中, 构造了一个传统方法与紧致格式混合组成的加权型差分格式. 利用该格式与二阶 TVD 格式分别计算了一维方波、组合波问题和一些黎曼问题, 如 Sod 问题和 Shu 问题, 以及一维定常激波问题. 计算结果的比较表明加权格式无论在捕捉各种间断, 还是在分辨各种复杂波系上, 都具有较大的优势, 并与精确解非常吻合.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 数值方法; 迎风紧致格式; 通量加权型差分格式

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

A flux-weighted compact scheme

YUAN Xiang-jiang^{1,2}, TU Guo-hua^{1,2}, XU Tan³, LU Li-peng⁴

- (1. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China;
2. National Computational Fluid Dynamics Laboratory,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;
3. School of Aeronautics Science and Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;
4. School of Jet Propulsion,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: With introduction of flux-weighted concept into the compact scheme, a new flux-weighted compact scheme was presented by combining classical scheme and compact scheme. This scheme and a 2nd order total variation diminishing (TVD) scheme were used to calculate one-dimensional square waves, combine waves and some Riemann problems, such as Sod problem and Shu problem, as well as one-dimensional steady shock. The results show that the new scheme has advantage over the 2nd order TVD scheme in capturing various discontinuities or resolving various complex waves. The results solved by the new scheme are also highly consistent with exact solutions.

Key words: aerospace propulsion system; numerical method; upwind compact scheme; weighted essentially non-oscillatory (WENO) schemes

以往用于流场计算的格式精度和分辨率不够 高, 因而, 对拓扑结构的描述存在着不同程度的失

收稿日期: 2006-12-27; 修订日期: 2007-03-28

基金项目: 国家自然科学基金(10321002; 10672012)

作者简介: 袁湘江(1962-), 男, 安徽濉溪人, 中国空气动力研究与发展中心研究员, 博士, 主要从事空气动力学研究.

真, 对有些情况, 失真程度还相当严重^[1]. 近年来, 一些高精度、高分辨度算法的出现, 如谱方法等, 使准确刻画流场中的拓扑结构成为可能. 由于谱方法只适用于周期边界条件和简单几何外形, 因此, 在实际应用上有很大限制. 1992 年 Lele^[2] 提出了一类紧致差分格式的构造方法, 它不仅在较小的模块上达到了比传统差分格式更高的精度, 并且分辨率接近谱方法. 但这种方法在计算超音速流场的激波等间断时, 将产生非物理振荡. 传统格式计算激波时, 通常是通过通量限制, 抑制非物理振荡. 主要思想有: TVD^[3] 和 ENO^[4] 等.

近来, 紧致格式计算间断的研究, 已成为普遍关注的焦点. 傅德薰和马延文^[5] 提出了群速度控制以及耗散比拟技术; 袁湘江和周恒尝试了利用激波装配与激波捕捉相结合的办法^[6] 等. Ravichandran^[7] 等人构造了 TVD 型混合格式, 虽然基本消除了激波附近振荡, 但计算稀疏波有过膨胀现象. 另外, TVD 型格式还存在极值附近格式降阶, 并附带有削峰现象等固有缺陷. Harten^[4] 等提出的 ENO 型格式, 在很大程度上改善了上述问题. 但目前比较成熟的 ENO 型算法, 还局限在传统的二阶精度格式.

受 Harten 和 Liu^[8] 的启发, 本文提出了一个传统格式与紧致格式混合的通量加权型差分格式 (简称 CWENO 格式). 它只须一阶迎风格式的模板, 在光滑处具有三阶精度. 通过一维定常激波和一维非定常激波管等典型问题的数值试验表明: 该格式不仅能够消除激波附近的非物理振荡, 而且能准确的计算膨胀波. 与二阶 TVD 格式相比对各种间断都具有更高的分辨率.

1 数值方法

考虑一维守恒型 Euler 方程的形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中 $F = \{\rho u, \rho u^2 + p, (e + p)u\}$, $U = \{\rho, \rho u, e\}$, ρ, u, p 分别表示气体的密度、速度和压力, $e = p/[\rho(\gamma + 1)] + u^2/2$ 表示总能量. 本文构造 CWENO 格式所涉及的两个三点三阶弱迎风紧致格式^[8] 具有如下形式

$$\begin{cases} 5F'_{j-1} + 8F'_j - F'_{j+1} = \frac{12}{h}(F_j - F_{j-1}) \\ -F'_{j-1} + 8F'_j + 5F'_{j+1} = \frac{12}{h}(F_{j+1} - F_j) \end{cases} \quad (2)$$

式中 F'_j 表示 F_j 的导数的差分近似式, h 为网格间距, $j = 1, 2, 3 \dots N$. 由 (2) 可见方程左端主对角

占优已自动满足, 格式分辨率的 Fourier 分析见文献[1]. 采用 Stage Warming 分裂, F 可分解为 F^+ 与 F^- 之和. 方程 (1) 的半离散形式为

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + (\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{j-\frac{1}{2}})/h = 0 \quad (3)$$

易知方程 (3) 的离散形式确保了格式的守恒性^[9].

若定义

$$\begin{cases} (\Delta F_{j+\frac{1}{2}})_1 = (\tilde{F}_j)_1 - F_j \\ (\Delta F_{j+\frac{1}{2}})_2 = F_{j+1} - (\tilde{F}_j)_2 \end{cases} \quad (4)$$

式中具有下标 1, 2 的两个量 $(\tilde{F}_j)_1$ 和 $(\tilde{F}_j)_2$, 内点分别对应下面两式

$$\begin{cases} 5(\tilde{F}_{j-1})_1 + 8(\tilde{F}_j)_1 - (\tilde{F}_{j+1})_1 = 12F_j \\ -(\tilde{F}_{j-1})_2 + 8(\tilde{F}_j)_2 + 5(\tilde{F}_{j+1})_2 = 12F_{j+1} \end{cases} \quad (5)$$

边界点

$$(\tilde{F}_2)_k + 2(\tilde{F}_1)_k = 5(F_1 + F_2)/2,$$

$$2(\tilde{F}_N)_k + (\tilde{F}_{N-1})_k = 5(F_N + F_{N-1})/2$$

式中 $k = 1, 2$. 定义

$$\begin{aligned} \Delta F_j^\pm &= F_{j+1}^\pm - F_j^\pm, \\ dF_{j+\frac{1}{2}}^+ &= \omega_1^+ (\Delta F_{j+\frac{1}{2}})_1 + \omega_2^+ \Delta F_j^+ + \omega_3^+ \Delta F_{j-1}^+ \end{aligned} \quad (6)$$

$$dF_{j+\frac{1}{2}}^- = \omega_1^- (\Delta F_j^-)_1 + \omega_2^- (\Delta F_{j+\frac{1}{2}})_2 + \omega_3^- \Delta F_{j+1}^- \quad (7)$$

加权系数

$$\omega_i^\pm = \alpha_i^\pm / \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j^\pm \right),$$

$$\alpha_i^\pm = c_i^\pm / (\varepsilon + IS_i^\pm)^2, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ε 为一个小的正数, 可以避免分母为零. 数值实验表明, ε 取值范围在 $10^{-8} \sim 10^{-6}$ 内. 系数 $c_i^\pm = \frac{6}{10}, c_2^\pm = \frac{3}{10}, c_3^\pm = \frac{1}{10}; c_1^- = \frac{3}{10}, c_2^- = \frac{6}{10}, c_3^- = \frac{1}{10}$. $IS_i^\pm$ ($i = 1, 2, 3$) 为模板的光滑度量系数, 本文中分别定义为

$$IS_1^+ = [(\Delta F_{j+\frac{1}{2}})_1]^2, IS_2^+ = (\Delta F_j^+)^2, IS_3^+ = (\Delta F_{j-1}^+)^2 \quad (8)$$

$$IS_1^- = (\Delta F_j^-)^2, IS_2^- = [(\Delta F_{j+\frac{1}{2}})_2]^2, IS_3^- = (\Delta F_{j-1}^-)^2 \quad (9)$$

则半离散的 CWENO 格式形式可写为

$$\begin{aligned} \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ &= F_j^+ + dF_{j+\frac{1}{2}}^+ \\ \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^- &= F_{j+1}^- - dF_{j+\frac{1}{2}}^- \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}^\pm = \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ + \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^- \quad (11)$$

$$\partial F / \partial x \approx F' = (\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{j-\frac{1}{2}})/h \quad (12)$$

2 结果与讨论

运用上述方法, 对波动方程中各种复杂的波

系运动以及流场中各种间断的捕捉进行了数值计算. 并与二阶 TVD 格式的计算结果进行了比较, 大部分算例与精确解的结果进行了比较.

2.1 求解单行波动方程的两个柯西(Cauchy) 问题

各算例时间项的计算均采用具有 TVD 性质的三步 Runge Kutta 方法, 计算域均在区间 $x \in [-1, 1]$ 上, 网格点总数是 301.

考虑如下单行波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (14)$$

该方程的精确解为

$$u(x, t) = u_0(x - t).$$

算例 1 方 波

对方程(14), 若初始条件为

$$\begin{cases} 1 & -\frac{3}{10} < x < \frac{3}{10} \\ 0 & \text{其 它} \end{cases} \quad (15)$$

则柯西问题(14) 表示了一个以匀速 1 向右传播的方波.

如图 1 所示, 二阶 TVD 格式对变量变化陡峭问题计算有抹平的趋势, 而通量加权型格式对这类问题的计算具有较大优势.

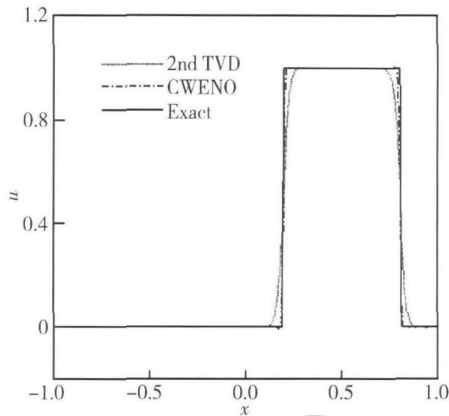


图 1 方波计算结果($t=0.5$)

Fig. 1 Solutions of square wave calculated ($t=0.5$)

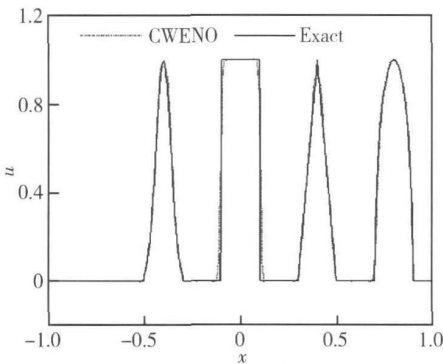
算例 2 组合波

对方程(14), 若初值条件为

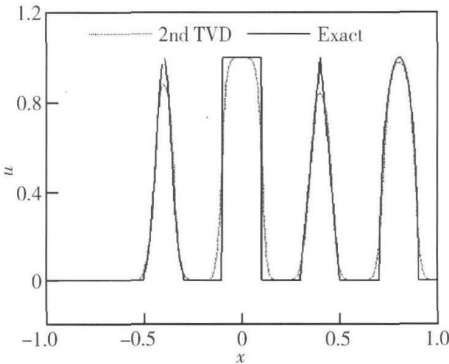
$$w_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}[G(x, \beta, z - \delta) + G(x, \beta, z + \delta) + 4G(x, \beta, z)] & -0.8 \leq x \leq -0.6 \\ 1 & -0.4 \leq x \leq -0.2 \\ 1 - |10(x - 0.1)| & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \frac{1}{6}[F(x, \alpha, a - \delta) + F(x, \alpha, a + \delta) + 4G(x, \alpha, a)] & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases} \quad (16)$$

式中

$$G(x, \beta, z) = e^{-\beta(x-z)^2}, \quad F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max[1 - \alpha^2(x - \alpha)^2, 0]}, \quad a = 0.5, \\ z = -0.7, \quad \delta = 0.005, \quad \alpha = 10, \quad \beta = \log 2 / 36 \delta^2$$



(a) CWENO 格式的计算结果



(b) 二阶 TVD 格式的计算结果

图 2 组合波计算结果与精确解的比较 ($t=0.3$)

Fig. 2 Comparison between solutions of combine waves calculated by the two schemes and analysis solution at $t=0.3$

则柯西问题 (14) 描述的是一组包括高斯 (Gaussian) 波、方波、尖三角波和半椭圆波在内的复杂组合行进波问题, 并且, 该组合波以匀速 1 向右传播.

由图 2 可知, 通量加权型格式计算的组合波无论对变化陡峭的问题, 还是对具有尖极值的问题的计算都具有较高的分辨率. 在高斯波和半椭圆波极值处均达到 1, 在三角波的极值处也达到了 0.96, 并且, 在利用该格式计算方波时, 方波的单边仅有 5 个点. 而利用二阶 TVD 格式计算组合波时, 仅在半椭圆波的极值处达到 0.98, 但在高斯波和三角波的极值处只分别达到 0.88 和 0.84, 另外, 利用该格式计算的方波, 其单边竟达到 19 个点之多. 可见, 二阶 TVD 格式在这两个问题的计算分辨率都不及加权格式.

2.2 模拟若干带有间断问题的一维 Euler 方程

算例 3 定常激波问题

一维定常激波是在诸多考核格式对激波捕捉能力的算例中, 要求较高的一个. 通过格式对一维定常激波的计算, 容易暴露一些其它算例反映不明显的问题. 该算例计算域在区间 $x \in [-3, 3]$ 上, 网格点总数是 131. 设来流马赫数为 Ma , 无量纲化后的入口条件是:

当 $x = -3$ 时

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\gamma Ma^2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

在出口处的物理量由精确解给出. 时间方向采用一阶精度.

图 3 为马赫数 $Ma = 3$ 时, 由 CWENO 和二阶 TVD 两种格式捕捉激波得到的密度, 压力和速度在空间的分布. 由图可见, CWENO 格式能有效控制激波附近的非物理振荡, 且激波上不满足 R-H 关系的非物理点只有两个, 如定义通量误差 $\varepsilon_i = \max \frac{|E_{ti} - E_{i0}|}{E_{i0}}$, ($i = 1, 2, 3$) 其中 E_{ti} 是任一点, E_{i0} 是进口处通量. 则最大通量的误差发生在激波上两个非物理点上, 其大小在 5% 左右, 其它各点上的 ε_i 均小于 0.1%. 这种方法还适用于 $Ma > 5$ 的高超声速. 而二阶 TVD 格式计算激波虽也能有效控制激波附近的非物理振荡, 但激波上的非物理点达到 5 个, 且 ε_i 也较大. 但二阶 TVD 格式的收敛速度明显优于 CWENO 格式, 同时, 通过考察计算数据, 不难发现 CWENO 格

式计算的激波波后还存在有轻微数值波动. 说明在格式的鲁棒性上, 二阶 TVD 格式优于 CWE-NO 格式.

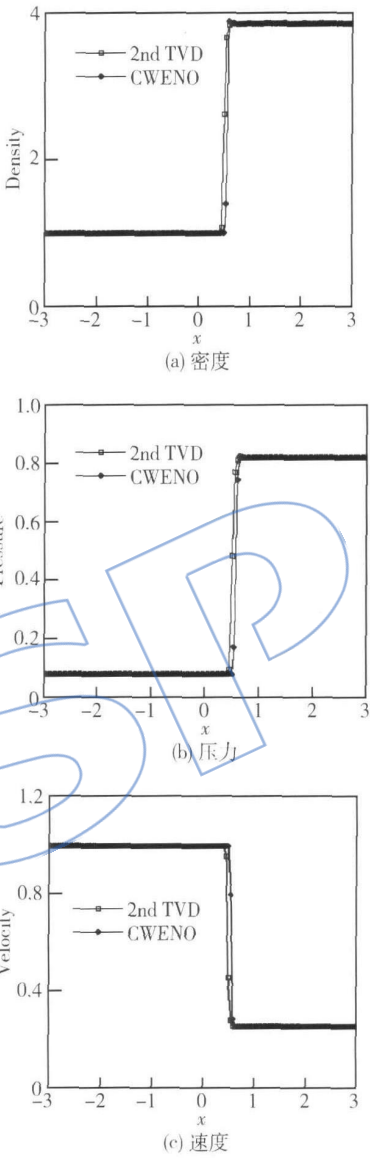


图 3 两种格式计算的定常激波的比较
Fig. 3 Comparison between solutions of steady shock calculated by two schemes

算例 4 Sod 问题

Sod 问题中包含有激波、膨胀波、接触间断等基本流动间断, 是检验计算格式捕捉间断能力的一个重要算例. 设该问题的初始条件分别为

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (-3 \leq x < 0) \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (0 \leq x \leq 3) \quad (19)$$

计算中在 $x = -3$ 和 $x = 3$ 的两个边界上的物理量均保持不变, 网格点总数是 131. 在时间方向采用了具有 TVD 性质的三阶三步 Runge-Kutta 方法.

图 4 是利用 CWENO 和二阶 TVD 两种格式计算激波管得到的结果. 由图可见二阶 TVD 格式与 CWENO 格式在捕捉激波时, 都相当干脆, 在计算膨胀波和接触间断时也不产生非物理振荡. CWENO 格式用 3 个点过激波, 而二阶 TVD

格式则用了 5 个点, 但 CWENO 格式在计算膨胀波时有轻微过冲现象. 可见 CWENO 格式的分辨率较高, 二阶 TVD 格式的“鲁棒性”较好.

算例 5 Shu 问题

Shu 问题没有精确解. 由于激波与正弦波的相互干扰, 诱发出高频扰动. 因而对格式的“鲁棒性”, 尤其是分辨率提出了更高的要求. 因此, 它对格式在广谱范围内的分辨率是一个重要考验.

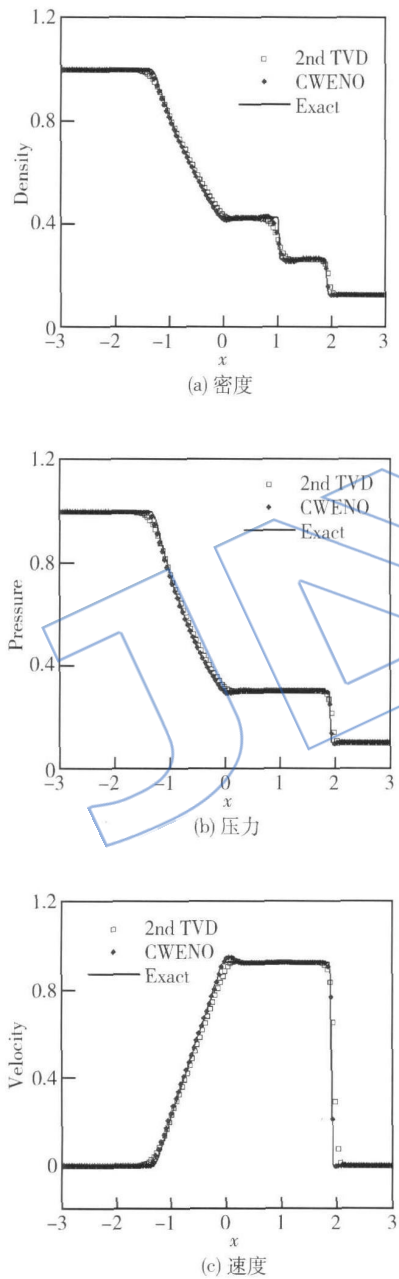


图 4 两种格式计算的 Sod 问题的比较 ($t = 0.57$)
Fig. 4 Comparison between solutions of Sod problem calculated by two schemes and analysis solutions ($t = 0.57$)

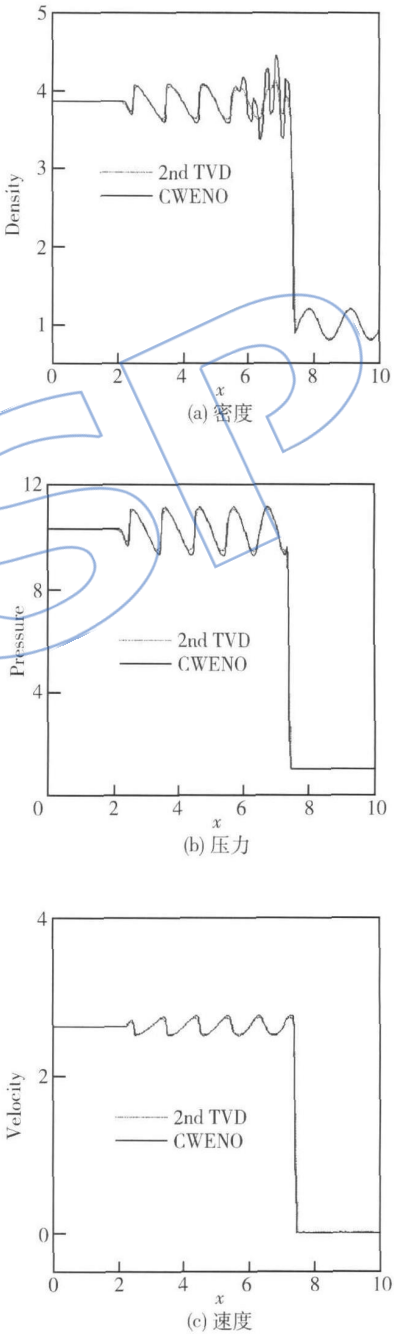


图 5 精确解与 CTVD, CWENO 格式计算 Shu 问题的结果比较 ($t = 1.8$)
Fig. 5 Comparison between Solutions of Shu-Osher problem calculated by two schemes at $t = 1.8$

Shu 问题的初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.333333) & 0 \leq x \leq 5 \\ (1 + \varepsilon \sin 5x, 0, 1.0) & 5 < x \leq 10 \end{cases} \quad (20)$$

图 5 是分别利用二阶 TVD 格式和 CWENO 格式计算的 Shu 问题, 在计算域 $(0, 10)$ 上, 共用 401 个网格点, 在 1.8 个时间单位时, 它们的计算结果进行的比较. 图中实线是 CWENO 格式的计算结果, 虚线是二阶 TVD 格式的计算结果. 由此再次说明: 在相同的网格点上, CWENO 格式具有更高的分辨率.

3 结 论

本文研究了高精度差分格式计算超音速流场中的间断问题, 通过与不同计算方法的计算结果比较, 得出以下几个结论:

(1) 将通量加权的思想引入到紧致格式中, 数值试验表明, 利用通量加权型紧致格式计算高超音速流场是一条成功的途径. 它的直接结果是导致高精度、高分辨度的紧致格式广泛应用于高超音速流动的数值模拟. 利用紧致格式对流动物理量、流场间断和拓扑结构的高精度、高分辨度计算, 必将大大促进空气动力学的应用和基础理论的研究.

(2) 利用本文构造的 CWENO 高精度差分格式对流场间断的捕捉和复杂波系的模拟都是十分成功的. 这种格式能有效的抑制流场间断附近的数值振荡, 并与包括复杂波系和流场间断在内的精确解的结果十分吻合.

(3) CWENO 差分格式模块小、精度高(最高

精度可达三阶), 且 CWENO 格式的分辨率明显优于二阶 TVD 格式. 但二阶 TVD 格式的“鲁棒性”优于 CWENO 格式.

(4) CWENO 差分格式数学形式简单, 便于推广. 同时, 还具有边界易处理, 稳定性高等优点.

参考文献:

- [1] 袁湘江, 桂业伟. 适于超音速流动的高精度高分辨度算法研究(阶段报告)[R]. CARDG 20010015, 2000.
- [2] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. J. Comput. Phys., 1992, 103: 16-42.
- [3] Harten A. High resolution schemes for conservation laws[J]. J. Comp. Phys., 1983, 49: 357-393.
- [4] Harten A, Osher S. Uniformly high order accurate non oscillatory schemes I. [J]. SIAM J. Numer. Anal., 1987, 24: 279-309.
- [5] 傅德薰, 马延文. 群速度控制方法及三维平面混合流的数值模拟[C] // 中国力学学会现代力学与科技进步学术大会论文集. 北京: 中国力学学会, 1997: 533-538.
- [6] 袁湘江, 周恒. 高精度格式计算激波的新方法[J]. 应用力学与数学, 2000, 21(5): 441-450.
YUAN Xiangjiang, ZHOU Heng. Numerical schemes with high order of accuracy for the computation of shock waves [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(5): 441-450.
- [7] Ravichandran K S. Higher order KFVS algorithms using compact upwind difference operators[J]. J. Comp. Phys., 1983, 49: 357-393.
- [8] Liu X D, Osher S, Chen T. Weighted essentially non oscillatory schemes[J]. J. Comp. Phys., 1994, 115: 200-212.
- [9] 周恒, 袁湘江. 关于 NND 格式的两点注记[J]. 空气动力学学报, 2000, 18(1): 52-54.
ZHOU Heng, YUAN Xiangjiang. Notes on the NND scheme [J]. ACTA Aerodynamics Sinica, 2000, 18(1): 52-54.